# Réduction des isométries

**Référence :** Algèbre, Gourdon p-268

**Leçons** :

**Théorème 1 :** Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie. Alors il existe une base $B$ de $E$ telle que la matrice de $u$ dans cette base a la forme par blocs :

$$mat_B u = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $\forall j$, $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ et $\forall i$, $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ $\theta_i \not\equiv 0\ [\pi]$.

**Théorème 2** Soit $E$ hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme unitaire (= isométrie dans le cas complexe). Alors $u$ se diagonalise en une base et toutes ses vp sont de module 1 ie

$$\forall U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}),\ \exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } P^{-1}UP = P^*UP = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

**Preuve 1**

Procédons par récurrence sur $n = \dim E$.

$n=1$ : $\forall B$ base de $E$, $mat_B u = (a)$ et $u$ isométrie $\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

$n-1 \Rightarrow n$ :

- Si $u$ admet une valeur propre $\varepsilon \in \mathbb{R}$, soit $x \in E$ le vecteur propre associé. On a :

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\varepsilon|\,\|x\| \Rightarrow \varepsilon = \pm 1 \text{ car } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Comme $F = \text{vect}(x)$ est $u$-stable, $F^\perp$ l'est aussi.

$\forall x \in F^\perp, \forall y \in F$ $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(y') \rangle$ ($u_{|F}$ est bijective)

$= \langle x, y' \rangle = 0$

On applique alors la propriété de récurrence à $u_{|F^\perp}$, on obtient $\mathcal{B}_0$ une base dans laquelle $u_{|F^\perp}$ a la forme $(*)$. En ajoutant $\frac{x}{\|x\|}$ à $\mathcal{B}_0$, on obtient $B$ dans laquelle $u$ a la forme $(*)$.

- Si $u$ n'admet aucune vp réelle. On considère $v = u + u^*$ symétrique donc admet une vp réelle $\lambda$ associée à $x$. On a :

$$(u+u^*)(x) = \lambda x \Rightarrow u(u+u^*)(x) = u^2(x) + x = \lambda u(x)$$
$$\Rightarrow u^2(x) = \lambda u(x) - x. \quad (**)$$

Comme $u$ n'admet pas de vp réelle, $(x, u(x))$ est libre, donc $F := \mathrm{vect}(x, u(x))$ est de dimension 2. $F$ est stable par $u$ $((**))$. Soit $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{B_0} u_{|F}$ où $B_0$ est une bon de $F$. $u_{|F}$ est une isométrie donc :

$$NN^* = N^*N = I_2$$

En particulier : $a^2+b^2 = a^2+c^2 = 1$ et $ab+cd = 1$ $\quad (***)$

$\Rightarrow$ $c = \pm b$

$\Rightarrow$ $0 \neq c = -b$ car sinon $N \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ aurait une vp réelle

et aussi : $d = a$.

Finalement, $a^2+b^2 = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$, $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ avec $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$ car $b \neq 0$. D'où $N = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Finalement, $F^\perp$ stable par $u$, $u_{|F^\perp}$ isométrie donc $B_1$ bon $u_{|F^\perp}$ DZ. $B = B_0 \cup B_1$ ☒

Preuve 2 :

Soit $\lambda$ vp de $u$, $x \neq 0$ vecteur propre. Alors :

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda|\,\|x\| \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1.$$

Puis, par récurrence sur $n = \dim E$.

$n=1$ : OK

$n-1 \Rightarrow n$ : $\mathbb{C}$ algébriquement clos donc $\exists \lambda \in S^1$ vp avec $x$ $\vec{vp}$.

$F = \mathrm{vect}(x)$ $u$-stable, $F^\perp$ aussi $\Rightarrow B_0$ bon de $F^\perp$ tq $u_{|F^\perp}$ diag

$B = \{x\} \cup B_0 \ldots$

☒